

Wellen

Einleitung

Def. (Welle) Zeitliche und räumliche Störung eines Mediums.

Def. (Transversal) Störung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Def. (Longitudinal) Störung parallel zur Ausbreitungsrichtung.

Wellentypen

Def. (Wellenfunktion) $\xi = \xi(x, t)$ beschreibt die Auslenkung der Welle.

Def. (Dispersion) Veränderung der Form des Wellenberges.

Dispersion wird im folgenden vernachlässigt.

Satz + nach Links, - nach Rechts

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt).$$

Def. (Phasengeschwindigkeit) v in der obigen Gleichung.

Def. (Harmonische Welle) $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(k(x \pm vt))$

Satz

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Satz

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t + \phi_0).$$

Satz (Zusammenhang der Wellenparameter)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = vk = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

Satz (Wellengleichung)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Satz (Lösungen der Wellengleichung) Für f, g beliebig löst folgendes die Wellengleichung

$$\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

Satz (Transversalwelle)

$$\xi(z, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t).$$

Satz (Phasengeschwindigkeit Seilwelle)

$$v = \pm \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho A}}.$$

T : Tension, μ : lineare Massendichte.

Def. (Ebene Welle) Der Geometrische Ort Oszillatoren gleicher Phase ist eine Ebene senkrecht zu $\mathbf{v}$.

$$\xi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Def. (Verschiebungsvektor)

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Satz (Transversale Welle)

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\Delta\delta} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (1)$$

Def. (Lineare Polarisation) $\Delta\delta = 0$ oder π in Gleichung 1.

Def. (Zirkulare Polarisation) $\Delta\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ und $A_x = A_y$ in Gleichung 1.

Def. (Richtung der Zirkulation) Rechtszirkular: $\Delta\delta = \frac{\pi}{2}$; Linkszirkular: $\Delta\delta = -\frac{\pi}{2}$.

Def. (Elliptische Polarisation) Alle anderen Fälle von $\Delta\delta$ und A_x, A_y in Gleichung 1.

Konzept (Polarität bestimmen) Für Polarisationsrichtung: Daumen in Wellenrichtung, Korkenzieher zeigt in Rechtszirkular für fixiertes z .

Def. (Wellengleichung im Raum)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \xi = 0.$$

Bsp. (Kugelwelle)

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{A_1}{r} f_1(kr - \omega t) + \frac{A_2}{r} f_2(kr + \omega t).$$

Faktor $\frac{1}{r}$ zeigt, dass Amplitude mit Abstand abnimmt. In 2 Dimensionen wäre die Amplitude proportional zu $r^{-0.5}$

Satz (Energiedichte mechanischer Welle)

$$\frac{dW}{dV} = \rho v^2 \left(\frac{df}{d(x - vt)} \right)^2.$$

Setzt sich zu gleichen Teilen aus kinetischer und potentieller Energie zusammen.

Satz (Energiedichte harmonischer Welle)

$$\frac{dW}{dV} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(k(x - vt)).$$

Satz (Mittlere Energiedichte harm. Welle)

$$\left\langle \frac{dW}{dV} \right\rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

Def. (Intensität) Leistung welche durch eine Fläche A pro Zeit t transportiert wird.

$$I = \frac{d^2 W}{dA dt} = \frac{dW}{dV} v.$$

Satz (Mittlere Intensität der harm. Welle)

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^3}{k} A^2.$$

Def. (Energieflussdichte)

$$\mathbf{S} = I \hat{n}.$$

Dies ist bekannt als Poynting-Vektor in der Elektrodynamik.

Def. (Energiestrom)

$$\frac{dW}{dt} = \dot{W} = \iint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}.$$

Superposition

Satz (Superposition) Seien ξ_1 und ξ_2 Lösungen der Wellengleichung, so ist auch $\xi = \xi_1 + \xi_2$ eine Lösung der Wellengleichung.

Def. (Kohärenz) Zeitlich: Nullphasenwinkel δ konstant; Räumlich: Wellefronten können überlappen

Def. (Gangunterschied)

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

x_1 und x_2 sind die Abstände zwischen Quelle und Messpunkt.

Satz (Superposition harm. Wellen) Gegeben ξ_1, ξ_2 gleicher Amplitude und Kreisfrequenz, so gilt

$$\xi = 2A \underbrace{\cos\left(\frac{\delta + k\Delta x}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\sin\left(kx_1 - \omega t + \frac{\delta + k\Delta x}{2}\right)}_{\text{Harmonische Welle}}$$

Die Amplitude ist Zeitunabhängig!

Def. (konstruktive Interferenz) Resultierende Welle hat doppelte Amplitude,

$$\frac{\delta + k\Delta x}{2} = n\pi.$$

Def. (destruktive Interferenz) Resultierende Welle verschwindet

$$\frac{\delta + k\Delta x}{2} = \frac{2n+1}{2} \pi.$$

Konzept Kohärenz ist notwendig für Interferenz. Glühlampen können daher nicht interferieren.

Def. (Schwebung) Zwei Wellen mit gleicher Amplitude, aber leicht unterschiedlichen Frequenzen überlagern sich.

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right).$$

Schwebefrequenz ist definiert als $f_S = |f_1 - f_2|$.

Reflexion und Transmission

Def. (Reflexion & Transmission) Trifft ein Medium auf eine Grenzfläche wird ein Teil durchgelassen (Transmission) und ein Teil wird zurückgelaufen (Reflexion).

Satz ω bleibt konstant, v, k, λ ändern sich.

Satz (Die Drei Wellenfunktionen)

$$\begin{aligned} \xi_A &= A \exp(i(+k_1 x - \omega t)) \\ \xi_R &= R \exp(i(-k_1 x - \omega t + \delta_R)) \\ \xi_T &= T \exp(i(+k_2 x - \omega t + \delta_T)). \end{aligned}$$

Satz (Amplitudenstetigkeit)

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} (\xi_A + \xi_R) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \xi_T.$$

Satz Eine zweite Randbedingung aus z.B. einer Kraftbilanz an der Grenzfläche löst das Problem vollständig und liefert R und T .

Bsp. (Seilwelle)

$$S_1 \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \Big|_{x=0} + S_1 \frac{\partial \xi_R}{\partial x} \Big|_{x=0} = S_2 \frac{\partial \xi_T}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Satz

$$T \sin \delta_T = R \sin \delta_R.$$

Def.

$$\alpha := \frac{k_2 S_2}{k_1 S_1} = \sqrt{\frac{S_2 \rho_2}{S_1 \rho_1}}.$$

$$\delta_T = 0, \quad \delta_R = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ \pi & \alpha > 1 \end{cases}.$$

Satz

$$R = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad T = \frac{2}{1 + \alpha}.$$

Kehren wir kurz zur Seilwelle zurück, so gilt

Def. (Offenes Ende)

$$\alpha = 0 \Rightarrow R = 1, T = 2.$$

Das Seil kann frei am Ende schwingen.

Def. (Festes Ende)

$$\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow R = -1, T = 0.$$

Das Seil ist am Ende festgehalten.

Stehende Wellen

Satz (Superposition von Gegenläufigen Wellen) Gegeben, $\xi_1 = A \cos(kx - \omega t)$ und $\xi_2 = A \cos(-kx - \omega t + \delta_R)$, so gilt

$$\xi = 2A \cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right).$$

Def. (Stehende Welle) Eine Welle, welche nicht mehr fortschreitet, sondern an einem Ort oszilliert. Sie ist gekennzeichnet durch Knoten (Orte, an welchen die Amplitude immer Null ist) und Bäuche (Orte, an welchen die Amplitude maximal wird).

Satz (Reflexion am harten Medium) $\alpha \rightarrow \infty$ führt zu $\delta_R = \pi$ und damit

$$\xi = 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

Garantierter Knoten an der Grenzfläche ($x = 0$).

Satz (Reflexion am weichen Medium) $\alpha = 0$ führt zu $\delta_R = 0$ und damit

$$\xi = 2A \cos(kx) \sin(\omega t).$$

Garantierter Bauch an der Grenzfläche ($x = 0$).

Bsp. (Energiedichte mit hartem Medium)

$$\frac{dT}{dV} = 2\rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t)$$
$$\frac{dV}{dV} = 2\rho A^2 \omega^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t).$$

Für $\omega t = n\pi$ ist die Energie vollständig kinetisch, für $\omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ist die Energie vollständig potentiell.

Satz (Einhüllende stehender Wellen)

$$u(x) = u_0 \cos(kx + \varphi) = A \cos(kx) + B \sin(kx).$$

Die Konstanten werden durch die Randbedingungen bestimmt.

Satz (Beidseitig fixierte Saite) Es gilt $u(x=0) = u(x=L) = 0$, somit $A = 0$ und $kl = n\pi$, also

$$k_n = \frac{n\pi}{l}$$
$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\rho}}.$$

Satz (Einseitig fixierte Saite) Es gilt $u(x=0) = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial x}(x=L) = 0$, somit $A = 0$ und $kl = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, also

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$$
$$\omega_n = k_n v = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{S}{\rho}}.$$

Dopplereffekt

Satz (Dopplereffekt)

$$f_B = f_Q \frac{u + v_B}{u + v_Q}.$$

u : Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, v_B : Geschwindigkeit des Beobachters, v_Q : Geschwindigkeit der Quelle. $v_Q \geq 0$ falls Quelle sich bewegt, $v_B \geq 0$ falls sich Quelle zum Beobachter hinbewegt.

Satz (Mach-Kegel)

$$\sin \theta = \frac{u}{v_Q}.$$

θ : Halber Öffnungswinkel des Kegels.

Elektrostatik

Die elektrische Ladung

Def. (Elektrische Ladung) Eigenschaft eines Körpers welche positiv oder negativ ist. Gleiches Vorzeichen stößt sich ab, unterschiedliches Vorzeichen zieht sich an. Die Einheit ist C. Ladung taucht nur in diskretisierten Werten auf.

Satz (Ladungserhaltung) Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt konstant.

Das Coulomb'sche Gesetz

Satz (Coulomb'sches Gesetz)

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}.$$

ϵ_0 : Permittivität des Vakuums, $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Satz (Superposition) Die Gesamtwirkung mehrerer Ladungen ist die Vektorsumme der Wirkungen der einzelnen Ladungen.

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_j q_i}{r_{ji}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji}.$$

Energie einer Ladungsverteilung

Satz (Arbeit an Ladung) Um Ladung aus dem unendlichen an eine bestimmte Stelle zu bewegen:

$$W = \int_{\infty}^{r_{21}} -\mathbf{F}_{21}(r) \cdot d\mathbf{s}.$$

Überprüfen, ob nach Arbeit von Aussen oder Arbeit von Ladung gefragt ist

Satz (Energie einer Ladungsverteilung)

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_j q_i}{r_{ji}}.$$

Satz (Earnshaw-Theorem) Kein System stationärer Ladungen ist in einem stabilen Gleichgewicht unter der alleinigen Wirkung elektrischer Kräfte.

Das elektrische Feld

Def. (Elektrisches Feld)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{\mathbf{r}}_{0i}.$$

Satz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \iff \mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Def. (Testladung) Infinitesimale positive Ladung q welche das Feld nicht beeinflusst.

Konzept (Feldlinien) Feldlinien zeigen die Richtung des elektrischen Feldes an. Je dichter die Feldlinien, desto stärker das elektrische Feld. Sie führen von positiven zu negativen Ladungen.

Satz (Feld einer Ladungsverteilung)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} dV'.$$

Für endliche Ladungsdichten konvergiert dieses Integral.

Das Gauss'sche Gesetz

Satz (Gauss'sches Gesetz)

$$\iint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV.$$

Satz (Gauss'sches Gesetz in Differentialform)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Felder einfacher Verteilungen

Bsp. (Kugeloberfläche) Gauss'sche Fläche: Kugelschale

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases}.$$

Bsp. (Volle Kugel) Gauss'sche Fläche: Kugelschalen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases}$$

Bsp. (Unendlich Langer Draht) Gauss'sche Fläche: Zylinder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{\mathbf{r}}.$$

Bsp. (Unendliche Ebene) Gauss'sche Fläche: Box mit einer Seite parallel zur Ebene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}.$$

Die Energie des elektrischen Feldes

Def. (Energiedichte des E-Feldes)

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2.$$

Satz (Energie der Ladungsverteilung)

$$U = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV.$$

Dies ist Äquivalent zur Formel für die Punktladungen.

Andere Möglichkeit wäre Stückweise kleine Ladungen zu bewegen und die Arbeit zu summieren. Zum Beispiel, um eine Kugel zu basteln können wir Kugelschalen stapeln.

Das elektrische Potential

Da $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ existiert ein Potential.

Def. (Potentialdifferenz)

$$\phi_{BA} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Satz

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi.$$

Feldlinien zeigen in Richtung der Verringerung des Potentials.

Normalerweise setzen wir $\phi(\infty) = 0$.

Satz (Potential mehrerer Ladungen)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Satz (Energie einer Ladungsverteilung)

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Dies ist äquivalent zu den beiden anderen Formeln

Potentiale einfacher Verteilungen

Bsp. (Potentialdifferenz eines Plattenkondensators)

$$\phi_{BA} = E\Delta z.$$

Bsp. (Potential einer Punktladung)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

r : Distanz Punktladung - Testladung

Die Laplacegleichung

Satz (Poissongleichung)

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Satz (Laplacegleichung) Sind in einem Raum keine Ladungen vorhanden gilt

$$\nabla^2 V = 0.$$

Elektrische Leiter

Leiter und Isolatoren

Def. (Leiter) Material in welchem sich Ladungen frei bewegen können.

Satz (Grundeigenschaften Leiter) Folgendes gilt:

1. $\mathbf{E} = 0$ innerhalb,
2. $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$ ausserhalb,
3. $\rho = 0$ innerhalb,
4. ϕ ist konstant im Leiter,
5. Spitzeneffekt: Kleinerer Krümmungsradius $\Rightarrow$ höheres ρ ,
6. Die Gesamtladung ist auf der Oberfläche.

Satz (Spitzeneffekt Quantitativ)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

r_i : Krümmungsradius

Das allg. elektrostatische Problem

Konzept (allg. Problem) Sind alle Leiter im Vakuum müssen wir $\nabla^2 \phi = 0$ mit Randbedingungen lösen. Mögliche Formen sind, ϕ_k für alle Leiter definiert, Q_k für alle Leiter definiert oder eine Mischung.

Typischerweise wird Leiter geerdet um Randbedingung festzusetzen ($\phi_k = 0$).

Def. (Influenz) Verschiebung von Ladungen durch externe Verteilung von Ladung.

Konzept (Leiter Laden) Durch Erdung eines Leiters unter Influenz kann eine Ladung Q abfließen oder zugeführt werden, bis $\phi = 0$ gilt. Somit kann ein Leiter durch Erdung geladen werden.

Satz (Eindeutigkeitssatz) Es gibt genau eine Lösung der Laplacegleichung mit gegebenen Randbedingungen.

Faraday'sche Käfige

Def. (Faraday'scher Käfig) Ein abgeschlossener Leiter, welcher das Innere vor äußeren elektrischen Feldern schützt. Dies funktioniert, da das Elektrische Feld im Hohlraum, mit dem Eindeutigkeitssatz 0 sein muss.

Satz (Umschlossene Ladung) Eine Ladung in einem Faradayschen Käfig, lässt sich von aussen nicht lokalisieren, da das E-Feld Positionsunabhängig ist.

Kondensatoren

Def. (Kapazität)

$$C = \frac{Q}{\phi}.$$

Die Kapazität ist eine geometrische Eigenschaft.

Def. (Kondensator) Ein Kondensator ist ein Leiter, auf welchem Ladungen gespeichert sind.

Satz (Plattenkondensator) Gegeben zwei Platten mit Abstand $d \ll \sqrt{A}$, so gilt

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}.$$

Satz (Zylinderkondensator) Gegeben zwei Zylinder mit Radien R_1 und R_2 , so gilt

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Satz (Energie des Kondensators)

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}.$$

Satz (Serienschaltung von Kondensatoren)

$$C = \sum_i C_i.$$

Satz (Parallelschaltung von Kondensatoren)

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

Elektrische Ströme

Der elektrische Strom

Def. (Strom) Eine Nettoladung in Bewegung

Def. (Stromstärke)

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nA\bar{v}q.$$

n : Anzahldichte der freien Ladungsträger, v : Driftgeschwindigkeit.

Konzept (Stromrichtung) Entgegen der physikalischen Realität fließt Strom von + nach -.

Def. (Stromdichte)

$$\mathbf{J} = nq\bar{\mathbf{v}}.$$

Satz (Strom durch Fläche)

$$I_A = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}.$$

Ladungserhaltung

Satz (Kontinuitätsgleichung)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt}.$$

Satz (Kontinuitätsgleichung in Integralform)

$$I_{\partial V} = \iint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\iiint_V \frac{d\rho}{dt}.$$

In einem stationären Zustand gilt $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Das Ohm'sche Gesetz

Konzept Bei einem realen Leiter ist $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ da sonst kein Strom fließen würde. Die Spannungsquelle erzeugt somit ein nicht-konservatives E-Feld.

Satz (Ohm'sches Gesetz)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

σ : Leitfähigkeit.

Def. (Widerstand)

$$R = \frac{V}{I}.$$

Weniger allgemeine Form des Ohm'schen Gesetzes

Satz (Widerstand eines Zylinders)

$$R = \rho \frac{l}{A}.$$

$\rho = \frac{1}{\sigma}$: spezifischer Widerstand.

Schaltkreise diskreter Komponenten

Satz (Knotenregel) Für einen Knoten in einem Schaltkreis gilt $\sum I_i = 0$.

Satz (Maschenregel) Für eine Masche in einem Stromkreis gilt $\sum V_i = 0$.

Hierfür ist wenn wir einen Widerstand in Stromrichtung durchlaufen V negativ, wenn wir eine Spannungsquelle in Stromrichtung durchlaufen V positiv.

Satz (Serienschaltung von Widerständen)

$$R = R_1 + R_2.$$

Satz (Parallelschaltung von Widerständen)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Satz (Spannungsquelle) Eine reale Spannungsquelle hat einen Innenwiderstand.

$$V = \epsilon - Ir.$$

ϵ : Elektromotorische Kraft.

Energieumwandlung von Strom

Satz (Joule'sche Wärme)

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}.$$

Konzept Wenn eine 60 und 100 Watt Glühlampe in Serie geschaltet werden, so leuchtet die 60 W Glühlampe heller da sie den grösseren Widerstand hat.

Schaltkreise mit Kondensatoren

Konzept Schaltkreise mit Kondensatoren werden mit Differentialgleichungen und den Kirchhoff'schen Regeln gelöst. Hierbei ist der Zusammenhang $I = \dot{Q}$ zentral.

Relativitätstheorie

Galilei'sche Relativität

Def. (Axiome der GR) 1. Zeit und Raum sind absolut. 2. Die physikalischen Gesetze sind Forminvariant in Inertialsystemen. 3. Es gibt kein bevorzugtes Inertialsystem.

Def. (Ereignis) Physikalischer Vorgang, welcher an einem Ort zu einer Zeit stattfindet.

Def. (Vierervektor)

$$x_E = x_E^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Def. (Boost) Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt.

$$\beta = \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Satz (Galileitransformation)

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^1 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^\mu.$$

Satz (Invarianten) Längen und Zeitintervalle sind invariant unter Galileitransformationen.

Grundlagen der SRT

Def. (Axiome der SRT) 1. Es gibt Inertialsysteme in welchen die Naturgesetze Forminvariant sind. 2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich.

Def. (Lorentzfaktor)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Wichtig: Immer hinschreiben, gibt Punkte!

Uhren und Massstäbe

Def. (Messung) Eine Messung beginnt mit einem Startereignis und endet mit einem Stopereignis.

Satz (Zeitdilatation) Seien zwei Ereignisse, welche in K' am selben Ort stattfinden, so gilt

$$\Delta t = \gamma \Delta t'.$$

Das Zeitintervall ist in K' am kürzesten.

Satz (Längenkontraktion) Seien zwei Ereignisse, welche in K' gleichzeitig stattfinden, so gilt

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Das Längenintervall ist in K' am längsten.

Satz (Lorentztransformation)

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} x^\mu.$$

Hierbei wird von K nach K' mit $+\beta$ geboostet. Rückrichtung: $-\beta$

Def. (Minkowski-Metrik)

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Satz (Geschwindigkeitsaddition) Für u, v parallel gilt:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

u : Geschwindigkeit eines Objekts in K , u' : Geschwindigkeit des Objekts in K' , v : Relativgeschwindigkeit zwischen K und K' .

Satz Raumzeitintervalle $\Delta s^2 = (c\Delta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ sind Lorentzinvariant.

Def. Zeitartig: $\Delta s^2 > 0$, es gibt ein Inertialsystem, in welchem die Ereignisse am selben Ort stattfinden. Raumartig: $\Delta s^2 < 0$, es gibt ein Inertialsystem, in welchem die Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Lichtkegel: $\Delta s^2 = 0$.

Satz (Steigung im Minkowski-Diagramm)

$$\tan \alpha = \frac{c}{v}.$$

Je schneller sich ein Objekt bewegt, desto steiler ist seine Weltlinie im Minkowski-Diagramm.

Energie, Impuls und Masse

Def. (Vierergeschwindigkeit)

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = c\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

τ : Eigenzeit.

Def. (Viererimpuls)

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

$E = m\gamma c^2$: Energie, $\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$: Impuls.

Satz

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2.$$

Satz (Energie-Impuls-Beziehung)

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Def. (kinetische Energie)

$$E_{kin} = (\gamma - 1)mc^2.$$

Satz (Relativistische Zentripetalkraft)

$$F = \frac{m\gamma v^2}{r}.$$

Achtung: γ nicht vergessen!

Satz (Longitudinaler Dopplereffekt)

$$f = f^* \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

f^* : Frequenz der Quelle, f : Frequenz des Beobachters. $\beta > 0$ falls sich die Quelle auf den Beobachter zubewegt.

Satz (Transversaler Dopplereffekt)

$$f = \frac{f^*}{\gamma}.$$

Felder bewegter Ladungen

Magnetische Kräfte

Satz (Lorentzkraft)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

$\mathbf{B}$: Magnetisches Feld.

Satz (Ampère'sches Gesetz)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I.$$

μ_0 : Permeabilität des Vakuums.

Ladungsinvarianz

Satz (Ladungsinvarianz) Die Ladung ist ein Lorentzskalar.

$$\iint_{\partial V(t)} \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{a} = \iint_{\partial V'(t')} \mathbf{E}'(t') \cdot d\mathbf{a}'.$$

Transformationen elektrischer Felder

Satz

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma E_\perp.$$

Herleitung via Plattenkondensator mit Boost parallel oder senkrecht zu den Platten.

Felder bewegter Ladungen

Wir betrachten eine Ladung q welche mit v entlang der x -Achse bewegt.

Satz (Feld einer bewegten Ladung)

$$E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x'}{((\gamma x')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y'}{((\gamma x')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z'}{((\gamma x')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

Satz (Eigenschaften) 1. $\frac{E'_x}{E'_z} = \frac{x'}{z'}$ unabhängig von v .

2. Das Feld ist radial aber nicht mehr isotrop ($E_\perp > E_\parallel$). Somit ist $\nabla \times \mathbf{E}' \neq 0$.

Satz (Elektrisches Feld)

$$E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}.$$

Felder beschleunigter Ladungen

Wir betrachten eine instantan beschleunigte Ladung q welche von v_0 auf 0 abgebremst wird mit $a = -\frac{v_0}{\tau}$, weit entfernt, viel später, sodass $r \sim cT \gg x_0$ gilt.

Satz

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T \sin(\theta)}{c\tau}.$$

Satz Der radiale Anteil des Feldes ist stetig. $E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Somit ist

$$E_\theta = -\frac{qa \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}.$$

Satz (Energiedichte des Tangentialfeldes)

$$U_{E_\theta} = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{R < r < R+c\tau} E_\theta^2 dV = \frac{1}{3} \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \tau.$$

Satz (Larmorleistung)

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Kräfte auf bewegte Ladungen

Satz (Kräftetransformation) Es ruhe ein Teilchen in K' .

$$F'_{\parallel} = F_{\parallel}, \quad F'_{\perp} = \gamma F_{\perp}.$$

Wechselwirkung bewegter Ladungen

Satz Ein Teilchen welches an einem Strom vorbeifliegt erfährt eine Kraft

$$F_y = \frac{qI}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{v}{d}.$$

Magnetische Felder

Definition des magnetischen Feldes

Def. (Biot-Savart Kraft)

$$d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Das Ampère'sche Gesetz

Satz (Ampère'sches Gesetz)

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \iint_A \mathbf{J} d\mathbf{a}.$$

Satz (Ampère Differentiell)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Satz (Gauss für Magnetismus) Es gibt keine magnetischen Monopole.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Satz (Eindeutigkeitssatz) Für eine gegebene Stromverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ gibt es ein eindeutiges Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Das Vektorpotential

Def. (Vektorpotential) Da $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ existiert ein Vektorpotential $\mathbf{A}$, sodass

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Konzept Das Vektorpotential wird mit $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (Coulomb-Eichung) bestimmt.

Satz Das Vektorpotential einer Stromverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Das Biot-Savart'sche-Gesetz

Satz (Biot-Savart'sches Gesetz) Ein kleines Stück eines stromdurchflossenen Leiters $d\mathbf{l}$ erzeugt ein Magnetfeld

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Einige Beispiele

Satz (Unendlicher Draht)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}.$$

Satz (Unendliche Spule)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \mu_0 n I \hat{z} & r > R \end{cases}.$$

$n = \frac{N}{l}$: Windungsdichte

Satz (Energiedichte des Magnetfeldes)

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Relativistische Transformationen

Satz (Relativistische Transformation)

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + c \cdot \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ B'_{\parallel} &= B_{\parallel} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}). \end{aligned}$$

Magnetische Induktion

Entstehung der Induktion

Def. (Elektromotorische Kraft)

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Konzept In einem bewegten Leiter ist $\mathbf{E} = 0$ und somit

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.$$

Das Faraday'sche Gesetz

Def. (Magnetischer Fluss)

$$\Phi_B = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

Satz (Faraday'sches Gesetz)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}.$$

Satz (Faraday'sches Gesetz Differentiell)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Herleitung nur für stationäre Flächen, mit Satz von Stokes.

Das Lenz'sche Gesetz

Konzept (Lenz'sches Gesetz) Die magnetisch induzierte EMF erzeugt ihrerseits ein Magnetfeld, das der Änderung des Flusses entgegenwirkt.

Die gegenseitige Induktivität

Def. (Gegenseitige Induktivität)

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}.$$

Φ_{21} : Fluss durch Spule 2 aufgrund von Strom I_1 in Spule 1.

Satz (Gegenseitige Induktivität Symmetrie)

$$M_{21} = M_{12}.$$

Satz

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Die Selbstinduktivität

Def. (Selbstinduktivität)

$$L = \frac{\Phi}{I} = M_{11}.$$

Φ : Fluss durch die Spule aufgrund von Strom I in derselben Spule.

Bsp. (Stromkreis) Gegeben ein Stromkreis mit Spannung $\mathcal{E}_0$, Widerstand R und Selbstinduktivität L . Mit Kirchhoff folgt

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} - RI = 0.$$

Lösen der ODE mit Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Satz (Selbstinduktivität der Spule)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}.$$

N : Anzahl Windungen, A : Querschnittsfläche, l : Länge der Spule.

Satz (Energie der Selbstinduktivität)

$$W = \frac{1}{2} LI^2.$$

Satz (Energiedichte des Magnetfeldes)

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Wechselströme

Def. (Allgemeines Problem) Die Spannungsquelle ist der Treiber und der Strom die Antwort. Wir wollen die Amplitude und Phase der Antwort finden.

Freier, gedämpfter RLC-Kreis

Konzept Für L,R,C in Serie gilt

$$Q = CV, \quad I = \dot{Q} = C\dot{V}.$$

Mit Kirchhoff folgt

$$\begin{aligned} LC \frac{d^2 V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V &= 0 \\ \ddot{V} + \frac{R}{L} \dot{V} + \frac{1}{LC} V &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben also $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und $\rho = \frac{R}{2L}$.

Wechselspannung und Motor

Konzept Eine Leiterschleife, welche in einem homogenen Magnetfeld rotiert, erfährt eine EMF

$$\mathcal{E} = NBA\omega \sin(\omega t).$$

Dies erzeugt eine Wechselspannung.

Konzept (Motor) Wenn man auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld eine Wechselspannung legt, so erfährt sie ein Drehmoment

$$\tau = NIAB \sin(\omega t).$$

Wechselstromkreise

Satz (Spannungsbfälle)

$$V_R = -IR, \quad V_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad V_C = \frac{Q}{C}.$$

Satz (RL-Stromkreis)

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \tan \alpha = -\frac{\omega L}{R}.$$

Strom zu spät and der Induktivität.

Satz (RC-Stromkreis)

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\omega RC}.$$

Strom eilt vor am Kondensator.

Def. ωL heisst induktiver Widerstand, $\frac{1}{\omega C}$ heisst kapazitiver Widerstand.

Satz (Serieller RLC-Stromkreis)

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \quad \tan \alpha = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}.$$

Satz (Resonanzfrequenz)

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Konzept (Gekoppelter LRC-Kreis) Zwei RLC-Kreise nebeneinander können durch gegenseitige Induktivität gekoppelt werden. Die Differentialgleichungen sind

$$L_1 \ddot{Q}_1 + R_1 \dot{Q}_1 + \frac{Q_1}{C_1} + M \ddot{Q}_2 = 0$$

$$L_2 \ddot{Q}_2 + R_2 \dot{Q}_2 + \frac{Q_2}{C_2} + M \ddot{Q}_1 = 0$$

Komplexe Zahlen

Def. (Admittanz und Impedanz) Für I, V komplex,

$$Y = \frac{V}{I}, \quad Z = \frac{1}{Y}.$$

Y : Admittanz, Z : Impedanz.

Satz (Admittanzen und Impedanzen) Es gilt:

	Admittanz Y	Impedanz Z
R	$\frac{1}{R}$	R
L	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$

Satz (Paralleler RLC-Stromkreis)

$$Y = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

$$I_0 = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}, \quad \tan \alpha = R\omega C - \frac{R}{\omega L}$$

Leistungsaufnahme des Kreises

Bei der Leistung darf nicht komplex gerechnet werden, da $\Re(IV) \neq \Re(I)\Re(V)$.

Satz (Leistung)

$$\langle P \rangle = \langle UI \rangle = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \alpha.$$

α : Phasenverschiebung zwischen I und V .

Def. (Effektivspannung / Strom) Zur einfacheren Berechnung der Leistung:

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Der Transformator

Satz (Energieverlust im Kabel)

$$\frac{\Delta P_{\text{el}}}{P_{\text{el}}} = \frac{I^2 R}{IV} = \frac{P_{\text{el}} R}{V^2}.$$

Def. (Transformator) Ein Transformator besteht aus zwei Spulen mit Windungszahlen N_1 und N_2 , welche ineinander liegen und so den Fluss teilen.

Satz

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Maxwellgleichungen & Wellen

Bisherige Gleichungen

Satz (Inkonsistenz des Ampère'schen Gesetzes)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Es gilt $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ aber $\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$.

Def. (Verschiebungsstrom)

$$\mathbf{J}_V = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Satz (Ampère-Maxwell'sches Gesetz)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Satz (Kontinuitätsgleichung) Zeitliche Ableitung des Gauss'schen Gesetzes und Einsetzen in die Divergenz des Ampère-Maxwell'schen Gesetzes ergibt

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Die Maxwellgleichungen

Satz (Maxwellgleichungen)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Homogene Wellengleichung

Satz (Homogene Wellengleichung) Im Vakuum ($\rho = 0, \mathbf{J} = 0$) gilt

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Dies folgt aus Anwendung der Rotation auf die 3. und 4. Maxwellgleichung.

Satz (Lineare Welle)

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} B_0 \sin(kz - \omega t).$$

Es folgt durch einsetzen,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \quad E_0 = c B_0.$$

Wichtig: Beide Ansätze hinschreiben gibt Punkte!

Satz Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen, mit $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Es gilt

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}.$$

Satz Elektromagnetische Wellen transportieren Energie mit der Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Satz (Energiedichte der Welle)

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Def. (Poynting Vektor)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Satz (Poynting Theorem)

$$\frac{\partial (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0.$$

Satz (Intensität mit Poynting Vektor)

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt von der Mittelung über eine Periode.

Satz (Impulsdichte Elektromagnetischer Wellen)

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

Herleitungen

Satz (Herleitung der Wellengleichung)

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Folgt aus Anwendung der Rotation auf die 3. und 4. Maxwellgleichung und der Vektoridentität

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Satz (Geschwindigkeit EM-Welle)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Folgt aus berechnen von Rotation und zeitl. Ableitung der Welle und einsetzen in die 3. und 4. Maxwellgleichung.

Felder in Materie

Beobachtungen

Konzept Einfügen eines Dielektrika in einen Plattenkondensator ändert die Kapazität zu

$$C = \varepsilon C_{\text{vak}}.$$

ε : Dielektrizitätskonstante (Festkörper: 2-10, Flüssigkeiten: 20-80).

Elektrische Dipole

Def. (Elektrischer Dipol) Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Punkten mit Abstand d . Das Dipolmoment ist definiert als

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}.$$

d : Vektor von der negativen zur positiven Ladung.

Def. (Dipolmoment)

$$\mathbf{p} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Satz (Drehmoment auf Dipol)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Satz (Energie eines Dipols)

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Satz (Kraft auf Dipol)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}.$$

Atomare Dipole

Satz (Induzierter Dipol) Ein Atom in einem elektrischen Feld erfährt ein Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

α : Polarisierbarkeit des Atoms.

Felder polarisierter Materie

Def. (Polarisationsdichte)

$$Np dV = \mathbf{P} dV.$$

P : Polarisationsdichte, N : Anzahl der Atome pro Volumen.

Satz (Implizierte Oberflächenladungen)

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

$\hat{\mathbf{n}}$: Normalenvektor der Oberfläche.

Def. (Relative Dielektrizitätskonstante)

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{vak}}}{E_{\text{res}}}.$$

Elektrische Flussdichte

Def. (Elektrische Flussdichte)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Satz $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$

Wellen in Dielektrika

Satz (Gaussches' Gesetz)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{frei}}.$$

Satz

$$\nabla \mathbf{J}_{\text{geb}} = -\frac{\partial \rho_{\text{geb}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{P} \implies \mathbf{J}_{\text{geb}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Satz (Ampère-Maxwell'sches Gesetz)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{frei}} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Konzept (Welle in Dielektrikum)

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} B_0 \sin(kz - \omega t).$$

Es folgt durch einsetzen,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}, \quad E_0 = c B_0.$$

Magnetische Dipole

Def. (Magnetischer Dipol) Ein magnetischer Dipol besteht aus einem kleinen Stromkreis mit Strom I und Fläche A . Das magnetische Dipolmoment ist definiert als

$$\boldsymbol{\mu} = I A \hat{\mathbf{n}}.$$

$\hat{\mathbf{n}}$: Normalenvektor der Fläche.

Satz (Drehmoment auf magnetischen Dipol)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

Satz (Kraft auf magnetischen Dipol)

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Maxwell in Materie

Def. (D und H in linearen Medien)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}.$$

Satz (Maxwellgleichungen in Materie)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{frei}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Def. (Poynting Vektor)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Def. (Energiedichte)

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}.$$

Ferromagnetismus

Konzept (Hysteres) Ferromagnetische Materialien zeigen eine Hysteres, d.h. die Magnetisierung hängt von der Geschichte des angelegten Magnetfeldes ab.

Konstanten

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Mathematik

Vektoranalysis

Satz (Satz von Gauss)

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \cdot dV.$$

Satz (Satz von Stokes)

$$\int_{\partial A} \mathbf{F} d\mathbf{s} = \iint_A \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}.$$

Satz (Vektoridentitäten)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = f \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$$

$$\nabla \times (f \mathbf{F}) = f \nabla \times \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}.$$

Einige Integrale

$$\int \frac{x}{(a^2 + x^2)} dx = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi.$$

Differentialgleichungen

Satz (Lineare ODE Erster Ordnung) Die Lösung der ODE $y' + p(x)y = 0$ ist gegeben durch

$$y(x) = C e^{-\int p(x) dx}.$$

Für den Inhomogenen Fall rate partikuläre Lösung y_p und allgemeine Lösung $y = y_p + y_h$.

Harmonischer Oszillator

Satz (Schwache Dämpfung ($\rho < \omega_0$))

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\rho t} \cos(\omega t).$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$: gedämpfte Eigenfrequenz.

Satz (Kritische Dämpfung ($\rho = \omega_0$))

$$x(t) = A e^{-\rho t} (1 + B t).$$

Satz (Starke Dämpfung ($\rho > \omega_0$))

$$x(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t}.$$

$\lambda_{1,2} = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$: reelle Eigenfrequenzen.

Trigonometrie

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Klassische Probleme - Klassische Lösungen

Satz (E-Feld eines unendlichen Drahtes)

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}.$$

Herleitung ohne Gauss, mit Coulomb Integral: Da das Problem rotationssymmetrisch um die z -Achse ist, können wir das Integral in Zylinderkoordinaten lösen. Wir betrachten den Draht entlang der z -Achse und wollen das E-Feld in einem Punkt P in der xy -Ebene berechnen. Wir setzen den Punkt P auf die y -Achse, also $P = (0, r, 0)$. Der Draht hat eine lineare Ladungsdichte λ . Somit gilt für das E-Feld in P :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_{z\text{-axis}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ z \end{pmatrix} dz \end{aligned}$$

Wir können die z und y Komponenten separat betrachten. Für die z Komponente erhalten wir 0, da $\frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}}$ eine ungerade Funktion ist (sie ist punktsymmetrisch zum Ursprung) und das Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Intervall immer null ist.

Für die y Komponente erhalten wir

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz.$$

Nachschlagen in der Formelsammlung ergibt

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \left(-\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

Satz (Biot Savart auf Kreisring) Wir nutzen das Biot-Svart'sche Gesetz, um das Feld $d\mathbf{B}$ auf Grund des Stromes in $d\mathbf{l}$ zu berechnen, und nutzen, dass für alle Orte auf der z -Achse gilt, $d\mathbf{l} \perp \mathbf{r}$.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2 + z^2} \hat{B}.$$

Durch Integration über die ganze Stromschleife erhalten wir

$$\mathbf{B} = \oint d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + z^2)} \oint dl \hat{B}.$$

Da $\oint dl = 2\pi R$ gilt und aus Symmetriegründen $\hat{B} = \hat{z}$, korrigieren wir $\hat{B}$ um den Faktor $\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ und erhalten

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + z^2)} 2\pi R \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

Satz (B-Feld einer rotierenden, geladenen Scheibe auf der Z-Achse) **Aufgabe:** Eine dünne Kreisscheibe mit Radius R trägt eine gleichmäßige Flächenladung Q . Die Scheibe liegt in der xy -Ebene mit dem Zentrum im Ursprung und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse. Berechne das Magnetfeld $\mathbf{B}(z)$ in einem Punkt $P = (0, 0, z)$ auf der Rotationsachse.

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \left(\frac{R^2 + 2z^2}{2\sqrt{R^2 + z^2}} - |z| \right) \hat{e}_z.$$

Herleitung: Die Flächenladungsdichte der Scheibe beträgt $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$. Wir betrachten die Scheibe als eine Überlagerung von infinitesimalen Stromringen mit Radius r und Breite dr .

Die Ladung eines Ringes ist $dq = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot 2\pi r dr$. Da der Ring in der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ rotiert, erzeugt er den Strom:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \sigma (2\pi r dr) = \sigma \omega r dr.$$

Das Magnetfeld eines einzelnen Stromrings mit Radius r und Strom dI im Abstand z auf der Achse ist nach Biot-Savart gegeben durch:

$$dB_z = \frac{\mu_0 dI r^2}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} dr.$$

Aus Symmetriegründen heben sich die Komponenten in der xy -Ebene auf ($B_x = B_y = 0$). Integration über den gesamten Radius $r \in [0, R]$ ergibt:

$$B_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr.$$

Wir nutzen die Substitution $u = r^2 + z^2 \Rightarrow du = 2r dr$ sowie $r^2 = u - z^2$:

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \int_{z^2}^{R^2 + z^2} \frac{u - z^2}{u^{3/2}} du \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \int_{z^2}^{R^2 + z^2} \left(u^{-1/2} - z^2 u^{-3/2} \right) du \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \left[2\sqrt{u} + \frac{2z^2}{\sqrt{u}} \right]_{z^2}^{R^2 + z^2} \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2|z| \right). \end{aligned}$$

Einsetzen von $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ und Zusammenfassen der Brüche liefert das finale Ergebnis.

Satz (Induzierte Spannung an einem bewegten Stab im zeitabhängigen B-Feld) **Aufgabe:** Ein leitender Stab der Länge l gleitet mit konstanter Geschwindigkeit v auf zwei parallelen, reibungsfreien Schienen. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Stab bei $x = 0$. Das System befindet sich in einem ortshomogenen, aber zeitabhängigen Magnetfeld $\mathbf{B}(t) = B_0 e^{-t/\tau} \hat{e}_z$. Berechne die induzierte Spannung $U_{\text{ind}}(t)$ in der Leiterschleife und bestimme den Zeitpunkt t_{max} , an dem die Spannung betragsmäßig maximal ist.

$$U_{\text{ind}}(t) = -B_0 l v e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right), \quad t_{\text{max}} = 2\tau.$$

Herleitung: Der magnetische Fluss $\Phi_B(t)$ durch die vom Stab und den Schienen aufgespannte Fläche $A(t)$ ist definiert als:

$$\Phi_B(t) = \int_{A(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{A}.$$

Da das Magnetfeld senkrecht auf der Fläche steht und ortshomogen ist, gilt mit der zeitabhängigen Fläche $A(t) = l \cdot x(t) = lvt$:

$$\Phi_B(t) = B(t) \cdot A(t) = B_0 e^{-t/\tau} \cdot (lvt).$$

Nach dem Induktionsgesetz von Faraday ist die induzierte Spannung gegeben durch die totale Zeitableitung des Flusses:

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}}(t) &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\left(\frac{dB(t)}{dt} A(t) + B(t) \frac{dA(t)}{dt} \right) \\ &= -\left(-\frac{B_0}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot (lvt) + B_0 e^{-t/\tau} \cdot (lv) \right) \\ &= -B_0 l v e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Extremums setzen wir die Ableitung der Spannung gleich null:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{ind}}}{dt} &= -B_0 l v \left(-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) + e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \right) \right) \\ &= \frac{B_0 l v}{\tau} e^{-t/\tau} \left(2 - \frac{t}{\tau} \right) = 0. \end{aligned}$$

Da $e^{-t/\tau} \neq 0$, folgt direkt $2 - \frac{t}{\tau} = 0 \Rightarrow t_{\text{max}} = 2\tau$.

Satz (Energieaufteilung beim relativistischen Zweikörperzerfall) **Aufgabe:** Ein instabiles Teilchen der Masse M befindet sich im Ruhesystem und zerfällt in zwei Teilchen mit den Massen m_1 und $m_2 = 0$ (z.B. ein Photon oder Neutrino). Berechne die Energie E_1 und E_2 der Zerfallsprodukte.

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2}{2M} c^2, \quad E_2 = \frac{M^2 - m_1^2}{2M} c^2.$$

Herleitung: Wir nutzen die Erhaltung des Viererimpulses:

$$P_M^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu.$$

Im Ruhesystem des Ausgangsteilchens gilt $P_M^\mu = (Mc, \mathbf{0})$. Wir stellen die Gleichung nach P_2^μ um, um die Größen des masselosen Teilchens 2 auf eine Seite zu isolieren:

$$P_2^\mu = P_M^\mu - P_1^\mu.$$

Nun bilden wir das Lorentz-invariante Skalarprodukt (Minkowski-Quadrat) auf beiden Seiten:

$$(P_2)^2 = (P_M - P_1)^2 = P_M^2 + P_1^2 - 2P_M \cdot P_1.$$

Unter Verwendung der relativistischen Masse-Energie-Beziehung $P^\mu P_\mu = m^2 c^2$ erhalten wir:

- $(P_2)^2 = m_2^2 c^2 = 0$ (da $m_2 = 0$)
- $P_M^2 = M^2 c^2$
- $P_1^2 = m_1^2 c^2$
- $P_M \cdot P_1 = (Mc, \mathbf{0}) \cdot \left(\frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1 \right) = ME_1$

Einsetzen dieser Ausdrücke liefert:

$$0 = M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2ME_1.$$

Aufgelöst nach E_1 :

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2}{2M} c^2.$$

Aus der Energieerhaltung $E_M = Mc^2 = E_1 + E_2$ folgt für E_2 :

$$\begin{aligned} E_2 &= Mc^2 - E_1 = Mc^2 - \frac{M^2 + m_1^2}{2M} c^2 \\ &= \frac{2M^2 - (M^2 + m_1^2)}{2M} c^2 = \frac{M^2 - m_1^2}{2M} c^2. \end{aligned}$$

Satz (Ladungsdichte und Potential einer kugelsymmetrischen Feldverteilung) **Aufgabe:** Das elektrische Feld im Inneren einer geladenen Kugel mit Radius R ($r \leq R$) sei gegeben durch $\mathbf{E}(r) = Cr^n \hat{\mathbf{r}}$ für Konstanten $C > 0$ und $n > -1$. Bestimme die Ladungsdichte $\rho(r)$ im Inneren sowie das elektrostatische Potential $\Phi(r)$ für alle r , unter der Bedingung $\Phi(\infty) = 0$.

$$\rho(r) = \varepsilon_0 C(n+2)r^{n-1},$$

$$\Phi(r \leq R) = \frac{C}{n+1} \left(\frac{n+2}{n+1} R^{n+1} - r^{n+1} \right).$$

Herleitung: Für die Ladungsdichte nutzen wir die differentielle Form des Gauss'schen Satzes in Kugelkoordinaten $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (Cr^{n+2}) \\ &= \varepsilon_0 C(n+2)r^{n-1}. \end{aligned}$$

Die Gesamtladung Q der Kugel ergibt sich durch Integration:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi \varepsilon_0 C(n+2) \int_0^R r^{n+1} dr \\ &= \frac{4\pi \varepsilon_0 C(n+2)}{n+2} R^{n+2} = 4\pi \varepsilon_0 C R^{n+2}. \end{aligned}$$

Für den Außenraum $r \geq R$ verhält sich die Kugel wie eine Punktladung Q :

$$\begin{aligned} E_{\text{außen}}(r) &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{CR^{n+2}}{r^2} \\ \Rightarrow \Phi_{\text{außen}}(r) &= \int_r^\infty E_{\text{außen}}(r') dr' = \frac{CR^{n+2}}{r}. \end{aligned}$$

Am Kugelrand $r = R$ muss das Potential stetig sein: $\Phi(R) = CR^{n+1}$. Für das Innengebiet $r \leq R$ berechnen wir das Potential über das Linienintegral von r nach R :

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \Phi(R) + \int_r^R E_{\text{innen}}(r') dr' \\ &= CR^{n+1} + C \int_r^R (r')^n dr' \\ &= CR^{n+1} + \frac{C}{n+1} (R^{n+1} - r^{n+1}) \\ &= \frac{C}{n+1} ((n+2)R^{n+1} - r^{n+1}). \end{aligned}$$

Satz (Spannungsspitze beim Ausschalten einer realen Spule) **Aufgabe:** Eine Spule mit Induktivität L und Innenwiderstand R_1 ist an eine

Gleichspannungsquelle U_0 angeschlossen. Parallel zur Spule liegt ein Lastwiderstand R_0 . Für $t < 0$ befindet sich das System im stationären Zustand. Bei $t = 0$ wird die Spannungsquelle schlagartig getrennt. Berechne den Stromverlauf $I(t)$ durch die Spule sowie die am Widerstand R_0 anliegende Spannung $U_{R0}(t)$ für $t \geq 0$.

$$U_{R0}(t) = U_0 \frac{R_0}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_0}{L}t}.$$

Herleitung: 1. Stationärer Zustand ($t < 0$): Die Spule wirkt für Gleichstrom wie ein Kurzschluss. Der Strom fließt vollständig durch R_1 :

$$I_L(0^-) = \frac{U_0}{R_1}.$$

2. Maschenregel für $t \geq 0$: Da der Strom durch eine Induktivität nicht stetig springen kann, gilt $I_L(0^+) = I_L(0^-) = \frac{U_0}{R_1}$. Nach dem Öffnen bildet sich ein geschlossener Maschenstromkreis aus L , R_1 und R_0 . Die Maschenregel lautet:

$$\begin{aligned} -U_L(t) + I(t)R_1 + I(t)R_0 &= 0 \\ \Rightarrow L \frac{dI}{dt} + I(t)(R_1 + R_0) &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit der Lösung:

$$I(t) = I(0^+)e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R_1 + R_0}.$$

3. Spannung am Widerstand R_0 :

$$U_{R0}(t) = I(t) \cdot R_0 = \frac{U_0}{R_1} R_0 e^{-\frac{R_1+R_0}{L}t} = U_0 \frac{R_0}{R_1} e^{-t/\tau}.$$

Physikalische Bemerkung: Ist $R_0 \gg R_1$, so übersteigt die induzierte Spannung im Umschaltmoment den Wert der ursprünglichen Versorgungsspannung um ein Vielfaches ($U_{R0}(0^+) \gg U_0$).

Satz (Poynting-Vektor und Strahlungsdruck einer ebenen Welle) **Aufgabe:** Eine ebene elektromagnetische Welle breitet sich im Vakuum in z -Richtung aus. Das elektrische Feld lautet $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_y$. Berechne das dazugehörige Magnetfeld $\mathbf{B}(z, t)$, den Poynting-Vektor $\mathbf{S}(z, t)$ sowie den mittleren Strahlungsdruck p_{rad} , den die Welle bei senkrechtem Einfall auf eine perfekt absorbierende Fläche ausübt.

$$\mathbf{B} = -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_x,$$

$$\mathbf{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_z, \quad p_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2.$$

Herleitung: Das Magnetfeld berechnen wir über das Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Die Rotation von $\mathbf{E}$ in Kartesischen Koordinaten ergibt:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 k \sin(kz - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen mit $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ und Integration nach t (unter Ausnutzung von $c = \frac{\omega}{k}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z, t) &= - \int \begin{pmatrix} E_0 k \sin(kz - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= -\frac{E_0 k}{\omega} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_x \\ &= -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_x. \end{aligned}$$

Der Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ bestimmt den Energiefluss:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \left(E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_y \times \left(-\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_x \right) \right) \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kz - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Die zeitlich gemittelte Intensität $\langle I \rangle = \langle |\mathbf{S}| \rangle$ mit $\langle \cos^2(\theta) \rangle = \frac{1}{2}$ und $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ ist:

$$\langle I \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2.$$

Bei vollständiger Absorption wird die Impulsdichte $p = \frac{\langle I \rangle}{c}$ übertragen. Der Strahlungsdruck entspricht genau diesem Impulsübertrag pro Zeit und Fläche:

$$p_{\text{rad}} = \frac{\langle I \rangle}{c} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2}{c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2.$$

Physik II – Der Affen-Zirkus im Hörsaal & Das Bananen-Portal

